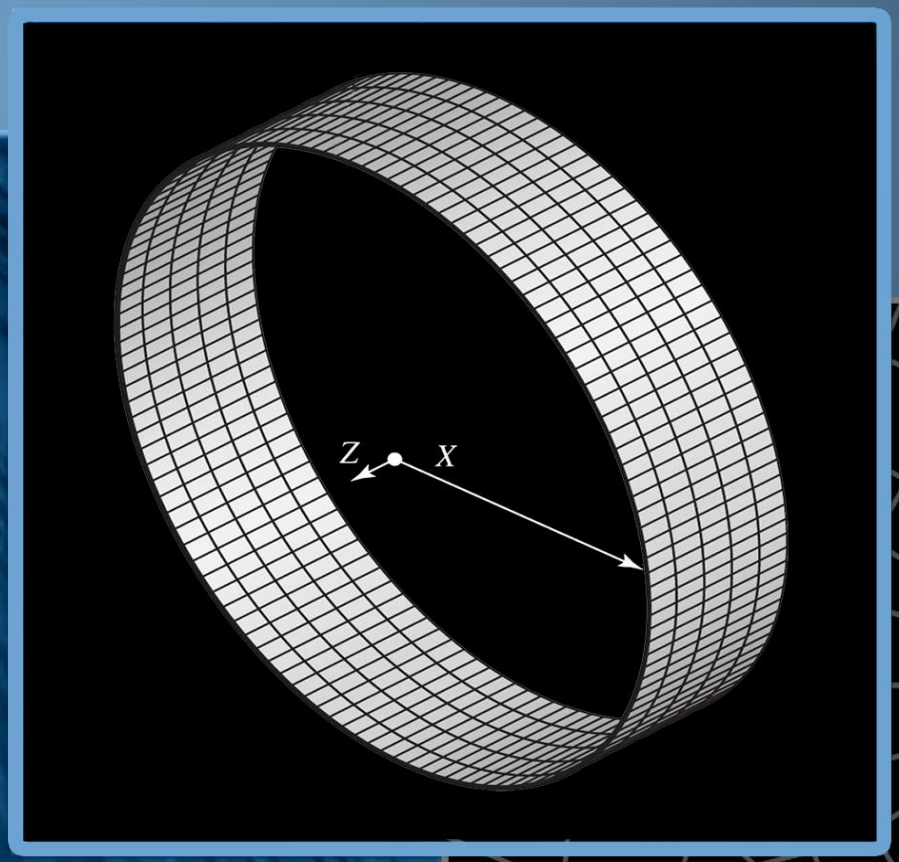
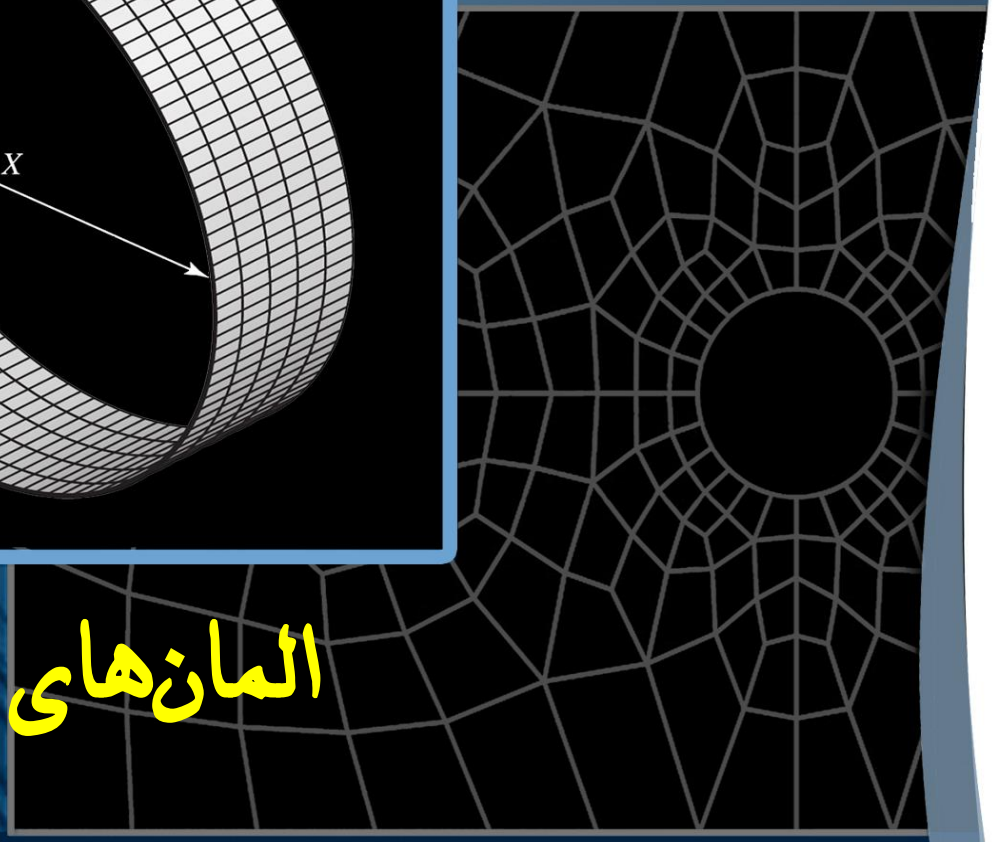
فصل یازدهم





المان‌های متقارن محوری

مرجع اصلی: مبانی تحلیل اجزاء محدود، تألیف دیوید هاتن، ترجمه شهاب الدین حاتمی و همکاران

مقدمه

سازه هایی با هندسه متقارن محوری

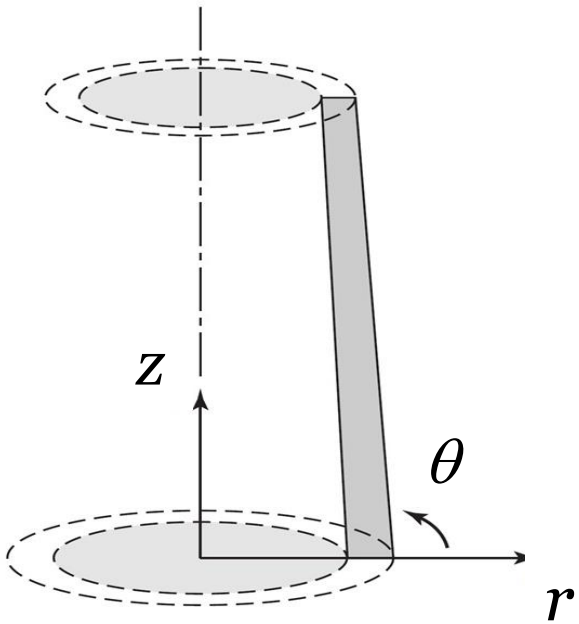
گنبد مسجد شیخ لطف ا... اصفهان

برج خنک کننده

دودکش کوره آجرپزی

آیا می توان در تحلیل این سازه ها از روش متقارن محوری بهره جست و آن را به یک مسئله دوبعدی تقلیل داد؟

شرایط لازم برای اینکه یک مسئله،
متقارن محوری باشد عبارتند از:



۱- تقارن محوری هندسه دامنه مسئله

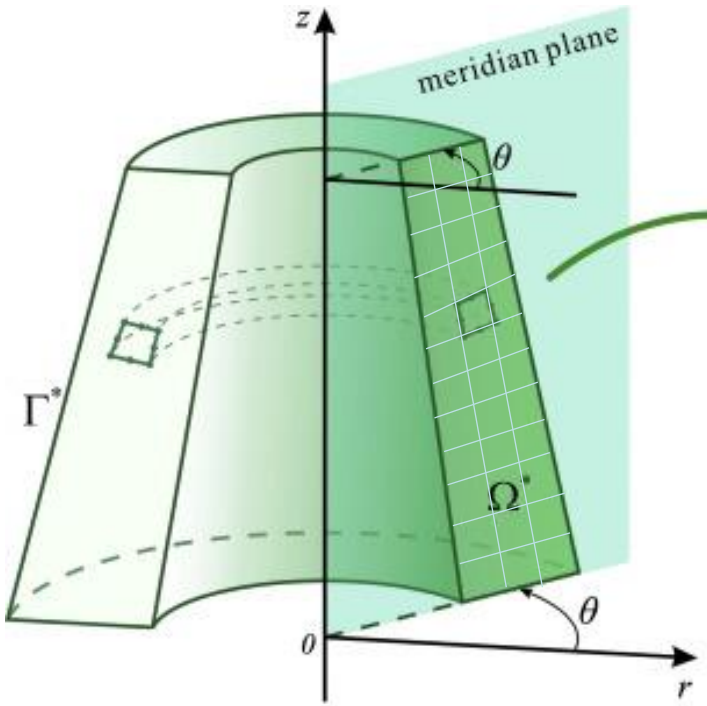
۲- تقارن محوری خصوصیات مصالح

۳- تقارن محوری شرایط مرزی

۴- تقارن محوری بارگذاری

اگر این شرایط برآورده شوند، متغیر میدانی فقط تابع مختصه‌های شعاعی و محوری (r, z) می‌باشد و از نظر ریاضی با معادلات دو بعدی توصیف می‌گردد.

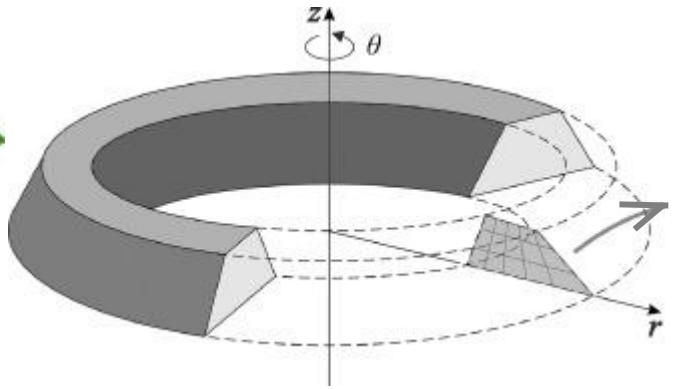
- در تحلیل اجزای محدود مسئله متقارن محوری، روند حل و از جمله توابع درونیاب مستقل از مختصه‌ی محیطی θ می‌باشند. در نتیجه هر المان دو بعدی و توابع نظیر آن المان را می‌توان در مسائل متقارن محوری به کار برد.



برشی از یک مسئله متقارن محوری

Computers & Structures

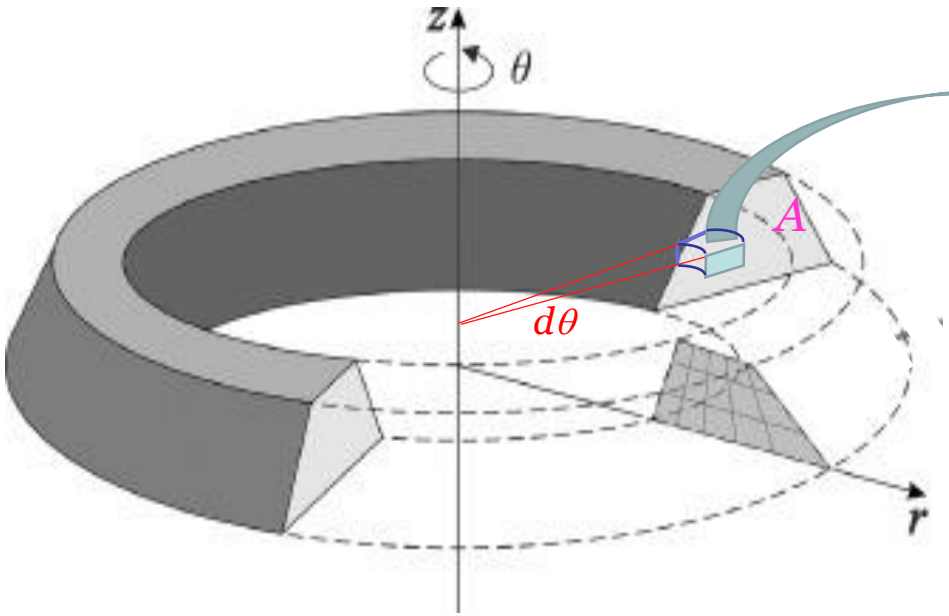
نمایش سه بعدی یک المان
چهارضلعی متقارن محوری



المان چهارضلعی
در فضای دو بعدی

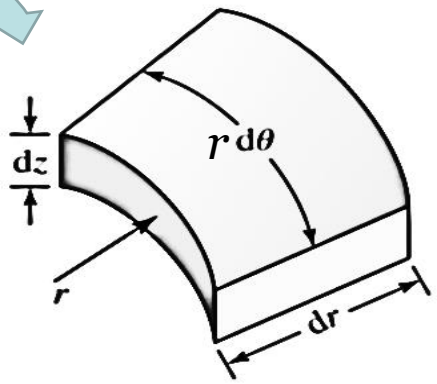
Engineering Analysis with Boundary Elements

$$\phi(r,z) = \sum_{i=1}^{M} N_i(r,z)\phi_i$$



نمایش سه بعدی یک المان محدود متقارن محوری

یک جزء حجم بینهایت کوچک



$$dV = r\,dr\,d\theta\,dz$$

انتگرال گیری بر حجم المان محدود:

$$F(r,\theta,z) = \iiint_V f(r,\theta,z)dV = \iiint f(r,\theta,z)r\,dr\,d\theta\,dz$$

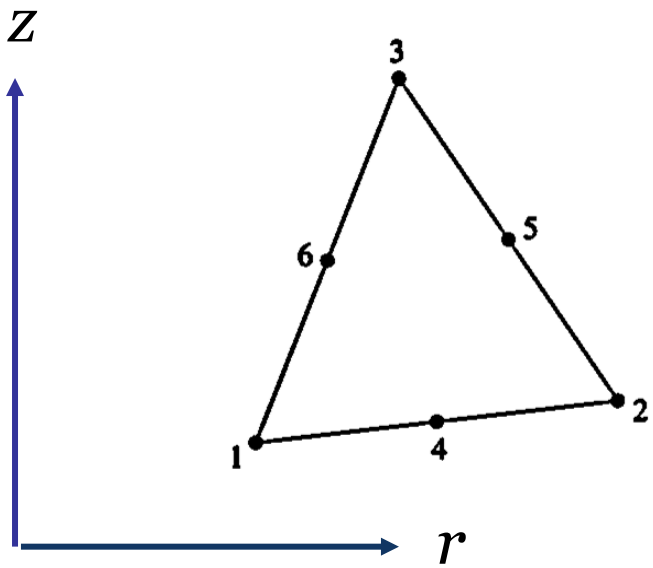
مسئله متقارن محوری:

$$F(r,\theta,z) \equiv F(r,z) = 2\pi \iint_A f(r,z)r\,dr\,dz$$

مثال ۱

برای یک المان متقارن محوری مبتنی بر المان مثلثی درجه دوم با شش گره، انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$I = \int_V N_2 N_4 dV$$



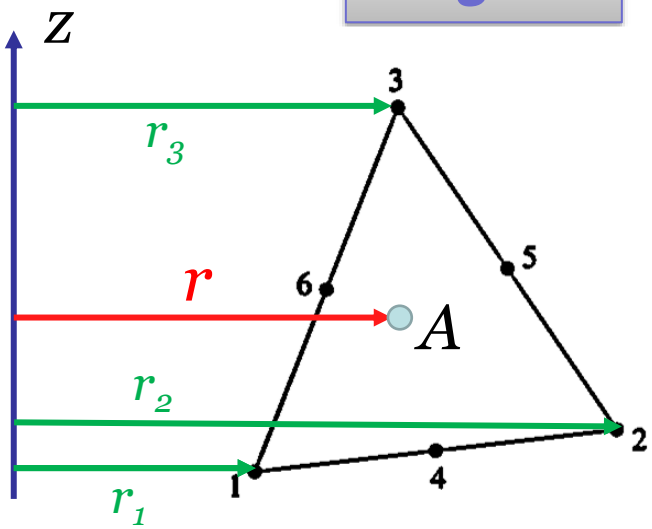
حل:

$$I = \int_V N_2 N_4 dV = 2\pi \int_V N_2 N_4 r dr dz$$

$$= 2\pi \int_A L_2(2L_2 - 1)(4L_1 L_2) r dr dz$$

مثال ۱

اگرچه توابع درونیاب متغیر میدانی، بر روی سطح المان به‌طور درجه دوم تغییر می‌کنند، اما از آنجا که اضلاع المان مستقیم هستند، مختصه‌ی شعاعی را می‌توان به‌صورت زیر از درونیابی خطی نقاط گرهی رئوس مثلث بدست آورد:



$$r = L_1 r_1 + L_2 r_2 + L_3 r_3$$

بنابراین نتیجه می‌شود که

$$I = 2\pi \int_A L_2(2L_2 - 1)(4\,L_1 L_2)(L_1 r_1 + L_2 r_2 + L_3 r_3)dA$$

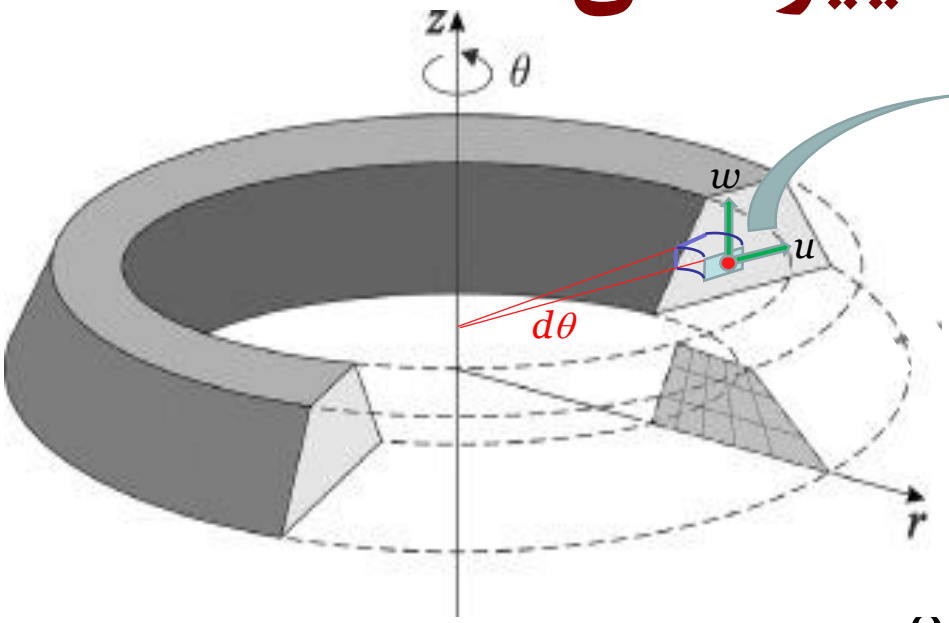
$$I = 16\pi \int_A \left(L_1^2 L_2^3 r_1 + L_1 L_2^4 r_2 + L_1 L_2^3 L_3 r_3\right)dA$$

$$- 8\pi \int_A \left(L_1^2 L_2^2 r_1 + L_1 L_2^3 r_2 + L_1 L_2^2 L_3 r_3\right)dA$$

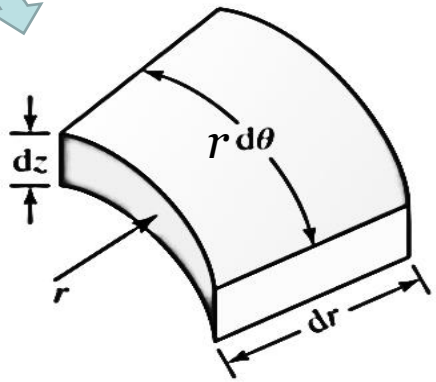
$$\iint_A L_1^a\, L_2^b\, L_3^c\; dA = (2A)\frac{a!\,b!\,c!}{(a+b+c+2)!}$$

$$I = \frac{\pi A}{315}(6r_2 - 4r_1 - 2r_3)$$

روابط کرنش-تغییرمکان



یک جزء حجم بینهایت کوچک

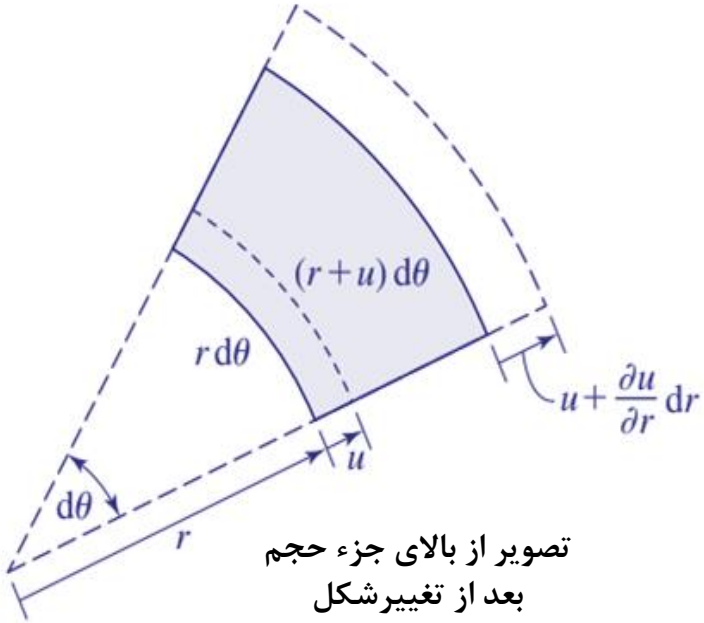


$$\gamma_{r\theta} = 0$$

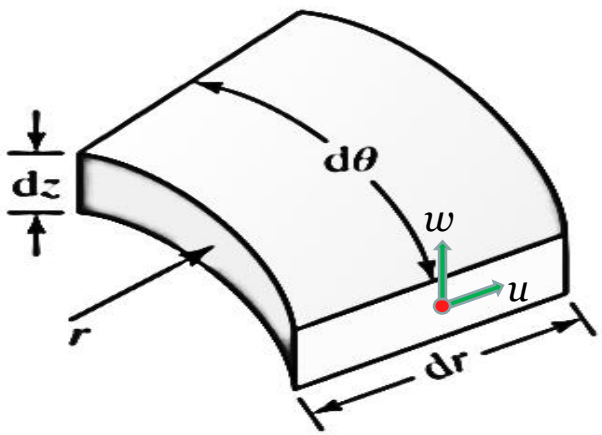
$$\gamma_{z\theta} = 0$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{\mathrm{d}r}\left(u + \frac{\partial u}{\partial r}\,\mathrm{d}r - u\right) = \frac{\partial u}{\partial r}$$

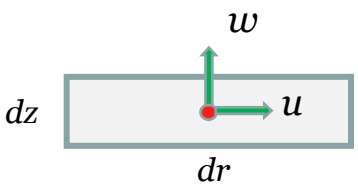
$$\varepsilon_\theta = \frac{(r+u)(d\theta) - r\,d\theta}{r\,d\theta} = \frac{u}{r}$$



تصویر از بالای جزء حجم
بعد از تغییرشکل



یک جزء حجم بینهایت کوچک



تصویر از مقابل
جزء حجم

$$\varepsilon_z = \frac{1}{\mathrm{d}z}\left(w + \frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}z - w\right) = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{u}{r} \\ \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{rz} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial r} \end{cases}$$

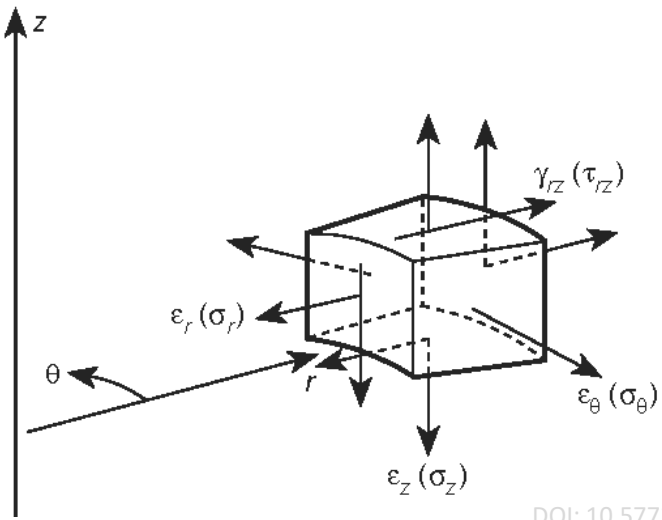
معادلات اساسی

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_r + \nu(\varepsilon_\theta + \varepsilon_z)]$$

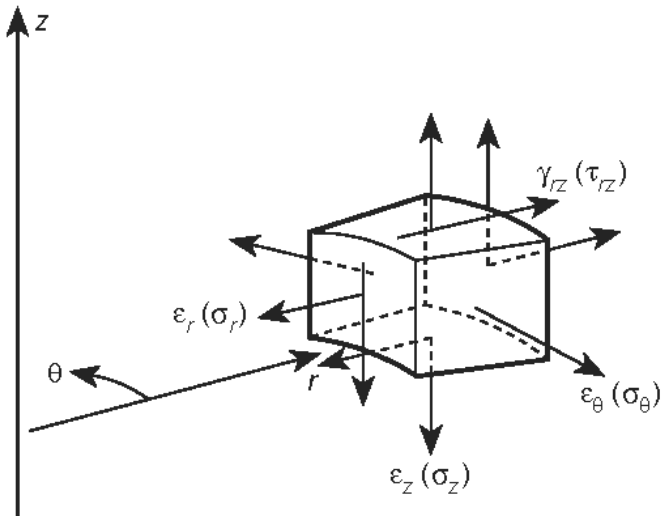
$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_\theta + \nu(\varepsilon_r + \varepsilon_z)]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)]$$

$$\tau_{rz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{rz} = G\gamma_{rz}$$

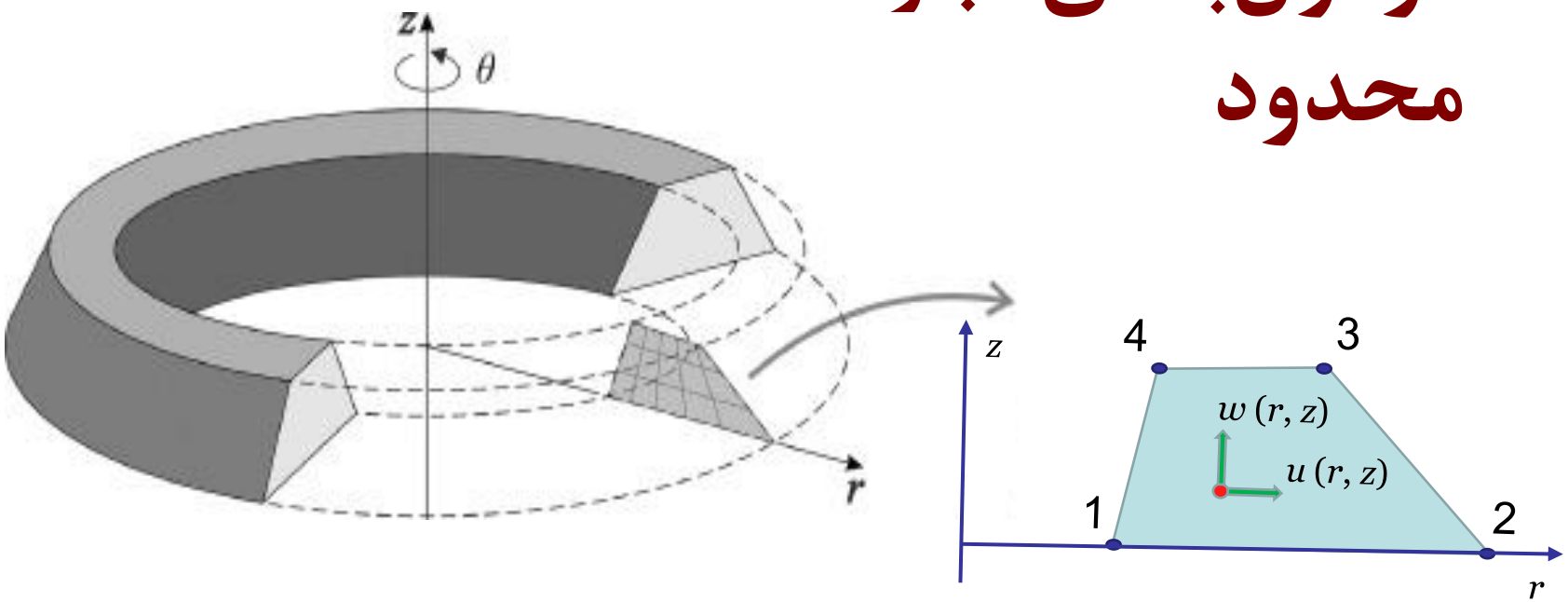


DOI: 10.5772/24215



$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}}_{[D]} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix}$$

فرمول‌بندی اجزاء محدود



$$u(r,z)=\sum_{i=1}^{M} N_i(r,z)\ u_i$$

$$w(r,z)=\sum_{i=1}^{M} N_i(r,z)\, w_i$$

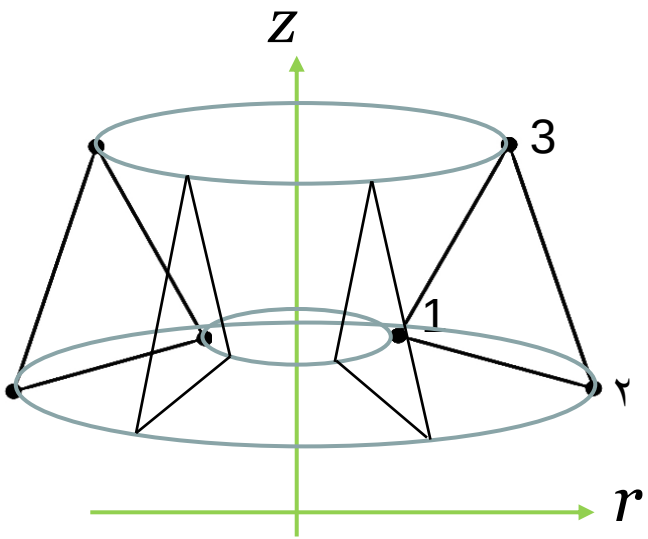
المان مثلثی سه گرهی

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial N_i}{\partial r} u_i$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \sum_{i=1}^{3} \frac{N_i}{r} u_i$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial N_i}{\partial z} w_i$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial N_i}{\partial z} u_i + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial N_i}{\partial r} w_i$$



$$N_1(r,z) = \frac{1}{2A}[(r_2 z_3 - r_3 z_2) + (z_2 - z_3)r + (r_3 - r_2)z]$$

$$N_2(r,z) = \frac{1}{2A}[(r_3 z_1 - r_1 z_3) + (z_3 - z_1)r + (r_1 - r_3)z]$$

$$N_3(r,z) = \frac{1}{2A}[(r_1 z_2 - r_2 z_1) + (z_1 - z_2)r + (r_2 - r_1)z]$$

المان مثلثی سه گرهی

$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \end{aligned}\right\}$$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\}$$

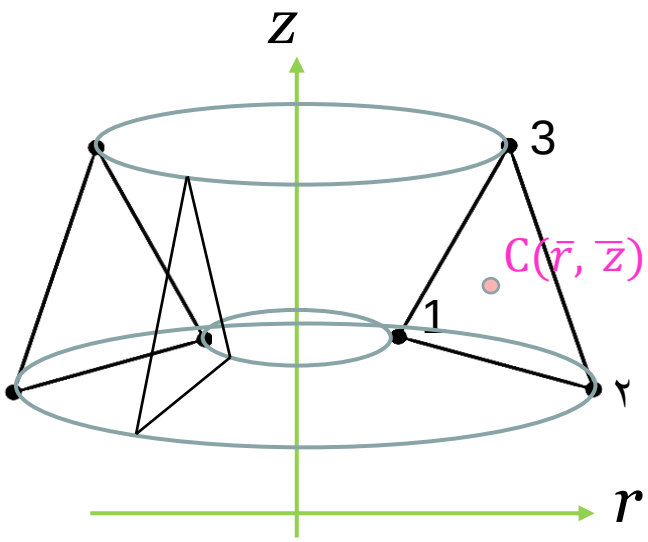
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial r} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{N_1}{r} & \frac{N_2}{r} & \frac{N_3}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix}$$

اگر $r=0$ در دامنه موجود باشد، فرمول‌بندی ماتریس [B] دشوار می شود.

المان مثلثی سه گرهی

$$\left[k^{(e)}\right] = \iint_{V^{(e)}} \int [B]^T [D][B] dV^{(e)}$$

$$\left[k^{(e)}\right] = 2\pi \iint_{A(e)} [B]^T [D][B] r\, dr\, dz$$

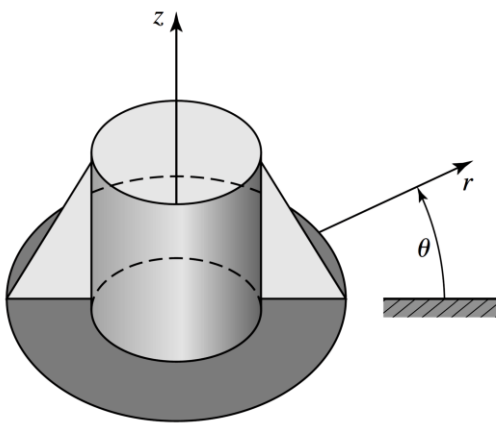


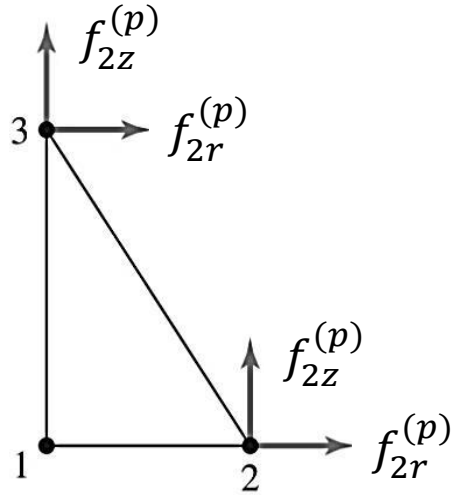
به عنوان یک روش تقریبی، می توان از مختصات مرکز سطح المان $(\bar{r}, \bar{z})$ در محاسبه ماتریس سختی استفاده کرد:

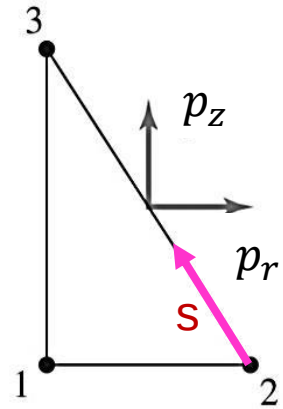
$$\left[k^{(e)}\right] \approx 2\pi \bar{r} A \left[\bar{B}\right]^T [D]\left[\bar{B}\right]$$

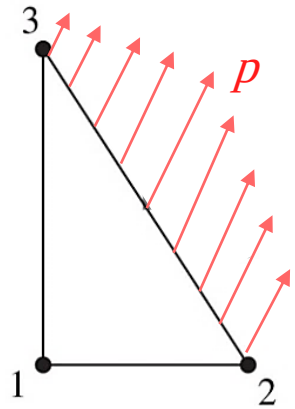
اگر $r=0$ در دامنه موجود باشد، با استفاده از $\bar{r}$ مشکل فرمول‌بندی ماتریس [B] حل می شود.

بار سطحی









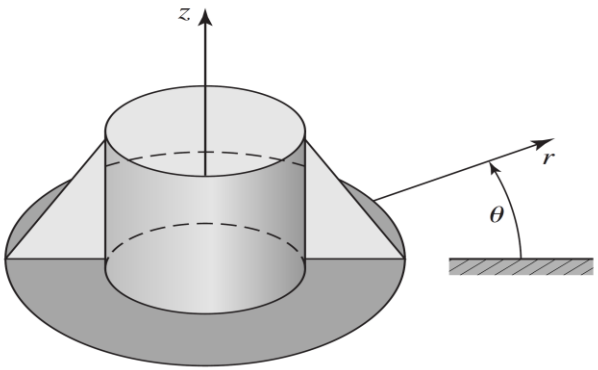
$$\left\{ f^{(p)} \right\} = \begin{Bmatrix} f_r^{(p)} \\ f_z^{(p)} \end{Bmatrix} = 2\pi \int_S [N]^T \begin{Bmatrix} p_r \\ p_z \end{Bmatrix} r \, dS$$

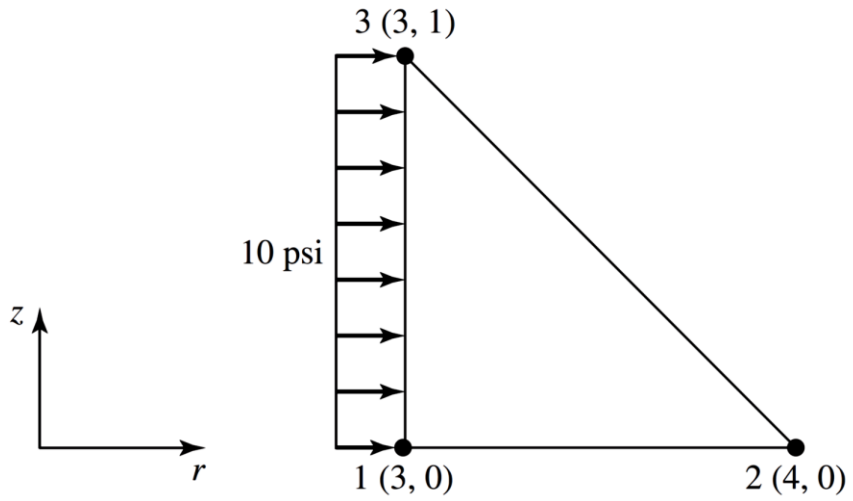
$$[N]^T = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ N_2 & 0 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_1 \\ 0 & N_2 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix}$$

برای المان مثلثی سه گرهی:

مثال ۱

نیروهای گرهی متناظر با فشار شعاعی یکنواخت را که مطابق شکل روی المان متقارن محوری اثر می‌کند، محاسبه کنید.





ابعاد بر حسب اینچ می‌باشند

مثال ۱

حل

از آنجایی‌که فشار تنها روی یک وجه اثر کرده و هیچ فشار محوری وجود ندارد:

$$f_{r2} = f_{z1} = f_{z2} = f_{z3} = 0$$

$$N_1(r,z) = \frac{1}{2A}[(r_2z_3 - r_3z_2) + (z_2 - z_3)r + (r_3 - r_2)z]$$

$$N_2(r,z) = \frac{1}{2A}[(r_3z_1 - r_1z_3) + (z_3 - z_1)r + (r_1 - r_3)z]$$

$$N_3(r,z) = \frac{1}{2A}[(r_1z_2 - r_2z_1) + (z_1 - z_2)r + (r_2 - r_1)z]$$

با مختصات داده شده برای گره ها

$$N_1 = 4 - r - z$$

$$N_2 = r - 3$$

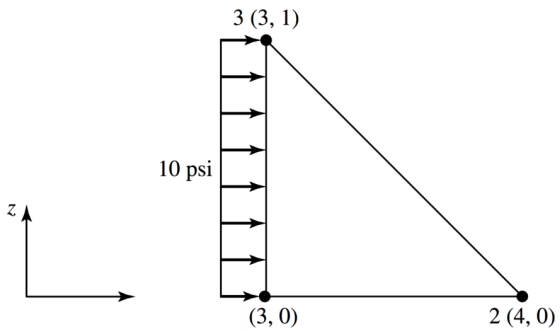
$$N_3 = z$$

در امتداد لبه ۱-۳ $(r = 3)$

$$N_1 = 1 - z$$

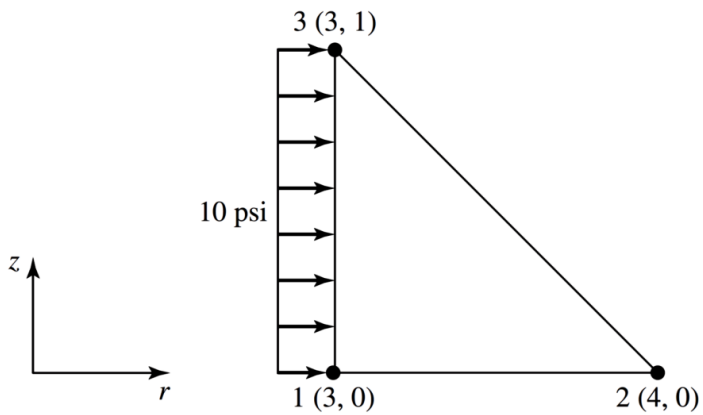
$$N_2 = 0$$

$$N_3 = z$$



$$f_{r1} = 2\pi \int_S N_1 p_r r \, dS \qquad f_{r3} = 2\pi \int_S N_3 p_r r \, dS$$

مثال ۱



$$f_{r1} = 2\pi \int_S N_1 p_r r \, dS$$

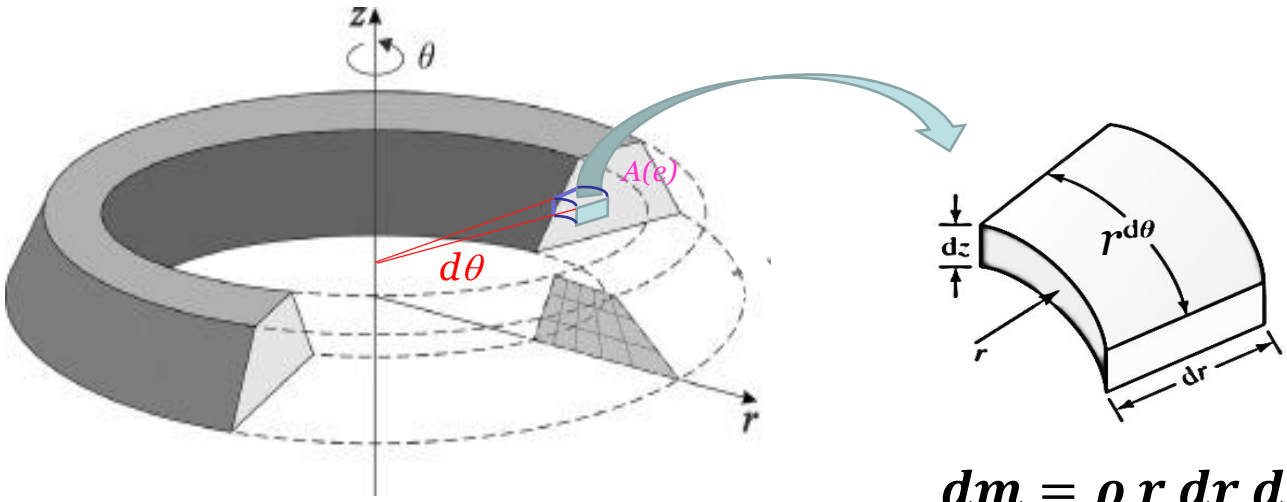
$$f_{r3} = 2\pi \int_S N_3 p_r r \, dS$$

اگر مسیر انتگرال‌گیری از گره ۱ تا گره ۳ باشد، در نتیجه ds=dz است و

$$f_{r3} = 2\pi(10)(3)\int_0^1 z\,dz = 30\pi \text{ lb}$$

$$f_{r1} = 2\pi(10)(3)\int_0^1 (1-z)\,dz = 30\pi \text{ lb}$$

نیروهای بدنه



جرم جزء بینهایت کوچک:

$$dm = \rho\, r\, dr\, d\theta\, dz$$

نیروهای وارد بر جرم واحد جسم در جهات مختصات:

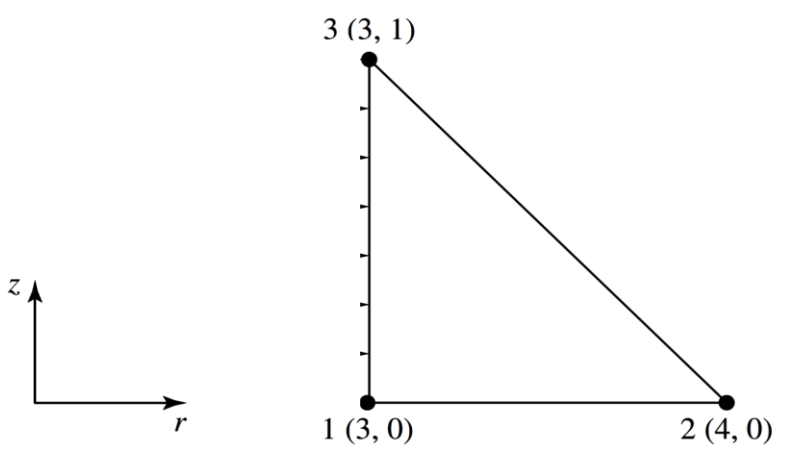
$$\begin{Bmatrix} R_B \\ Z_B \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ f^{(B)} \right\} = 2\pi\rho \int_{A(e)} [N]^T \begin{Bmatrix} R_B \\ Z_B \end{Bmatrix} r\, dr\, dz$$

مثال ۲

المان متقارن محوری شکل زیر قسمتی از یک جسم است که با سرعت زاویه‌ای ۱۰ *rad/sec* حول محور *z* می‌چرخد و در معرض جاذبه در امتداد منفی *z* قرار دارد. نیروهای گرهی معادل را محاسبه کنید.

چگالی ماده: $7.3(10)^{-4}\ \text{lb-s}^2/\text{in}^4$.



حل:

$$R_B = r\omega^2 = 100r\ \text{in./s}^2$$

$$Z_B = -g = -386.4\ \text{in./s}^2$$

مثال ۲

با مختصات داده شده
برای گره ها

$$N_1 = 4 - r - z$$
$$N_2 = r - 3$$
$$N_3 = z$$

$$f_{r1} = 2\pi\rho \int_A N_1 R_B r \, dr \, dz = 2\pi\rho(100) \int_3^4 \int_0^{4-r} (4 - r - z) r^2 \, dz \, dr = 0.84 \text{ lb}$$

$$f_{r2} = 2\pi\rho \int_A N_2 R_B r \, dr \, dz = 2\pi\rho(100) \int_3^4 \int_0^{4-r} (r - 3) r^2 \, dz \, dr = 0.98 \text{ lb}$$

$$f_{r3} = 2\pi\rho \int_A N_3 R_B r \, dr \, dz = 2\pi\rho(100) \int_3^4 \int_0^{4-r} z r^2 \, dz \, dr = 0.84 \text{ lb}$$

$$f_{z1} = 2\pi\rho \int_A N_1 Z_B r \, dr \, dz = -2\pi\rho(386.4) \int_3^4 \int_0^{4-r} (4 - r - z) r \, dz \, dr = -1.00 \text{ lb}$$

$$f_{z2} = 2\pi\rho \int_A N_2 Z_B r \, dr \, dz = -2\pi\rho(386.4) \int_3^4 \int_0^{4-r} (r - 3) r \, dz \, dr = -1.08 \text{ lb}$$

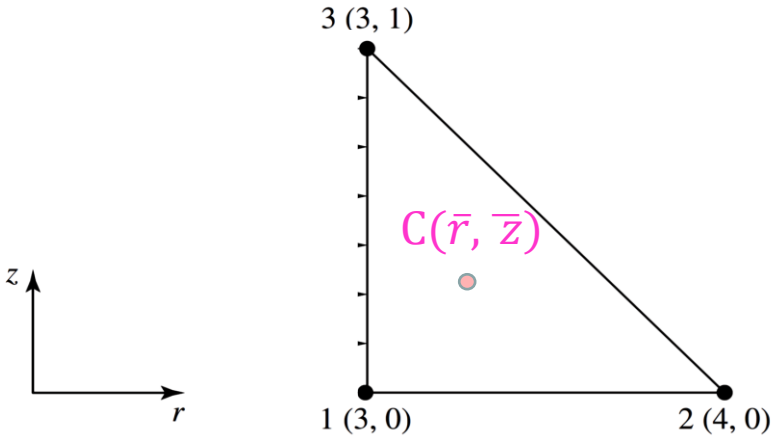
$$f_{z3} = 2\pi\rho \int_A N_3 Z_B r \, dr \, dz = -2\pi\rho(386.4) \int_3^4 \int_0^{4-r} z r \, dz \, dr = -1.00 \text{ lb}$$

مثال ۲

$$\left\{ f^{(B)} \right\} = 2\,\pi\,\rho \int_{A(e)} [N]^T \begin{Bmatrix} R_B \\ Z_B \end{Bmatrix} r\,dr\,dz$$

به عنوان یک روش تقریبی، می توان از مختصات مرکز سطح المان $(\bar{r}, \bar{z})$ در محاسبه انتگرال استفاده کرد که در این صورت:

$$\int_A N_i(\bar{r}, \bar{z})\,\bar{r}\,dz\,dr = \frac{\bar{r}A}{3} \qquad i = 1, 3$$

$$f_{r1} = f_{r2} = f_{r3} = 0.88 \text{ lb}$$

$$f_{z1} = f_{z2} = f_{z3} = -1.03 \text{ lb}$$